равному a; также введем класс “снежинок” $\mathcal{SN}(n,a)$ (в отличие от класса $\mathcal{ST}$, лучи областей из $\mathcal{SN}$ представляют собой прямоугольники) с аналогичными параметрами. Проведенный численный анализ позволяет сделать следующее

Утверждение 1.

1) *В классе* $\mathcal{ST}(n,a)$ *верна оценка* $\lambda \geqslant \lambda(\mathcal{ST}) > 4.64$, *и приближенное равенство* $P(\Omega) \approx 4.64 I(\partial\Omega)$ *выполняется для параметров* $n = 7$ *и* $a \approx 3.9$;

2) *в классе* $\mathcal{SN}(n,a)$ *верна оценка* $\lambda \geqslant \lambda(\mathcal{SN}) > 4.8$, *и приближенное равенство* $P(\Omega) \approx 4.8 I(\partial\Omega)$ *выполняется для* $n = 6$ *и* $a \approx 1.88$.

Утверждение 2. $\lambda > 6$ *в классе односвязных областей.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. *Кручение упругих тел.* – М.: ГИФМЛ, 1963. – 688 с.

2. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3–12.

3. Гиниятова Д. Х., Салахудинов Р. Г. *Евклидовый момент инерции и модифицированная жесткость кручения* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2007. – Т. 35. – С. 74–75.

Ф. Г. Авхадиев

Казань, Farit.Avhadiev@ksu.ru

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА Е. НИКОЛАИ

Пусть Ω — односвязная область на плоскости, а $P(\Omega)$ — коэффициент ее жесткости кручения по классической модели

Сен-Венана. В 1924 году Е. Николаи доказал изопериметрические неравенства

$$P(\Omega) \leqslant \frac{4I_x(\Omega)I_y(\Omega)}{I_0(\Omega)} \quad \text{и} \quad P(\Omega) \leqslant I_0(\Omega),$$

где $I_0(\Omega)$ — момент инерции Ω относительно центра масс, $I_x(\Omega)$ и $I_y(\Omega)$ — моменты инерции Ω относительно главных осей. Равенство в первом (во втором) неравенстве реализуется только в том случае, когда область Ω является внутренностью эллипса (круга).

Неравенства Е. Николаи тесно связаны с двумя классическими приближенными формулами

$$P(\Omega) \approx I_0(\Omega) \quad \text{и} \quad P(\Omega) \approx \frac{4I_x(\Omega)I_y(\Omega)}{I_0(\Omega)},$$

которые были известны задолго до создания Сен-Венаном дифференциальной модели жесткости кручения и восходят к формуле Кулона $P(D) = I_0(D)$ для круговых сечений D и приближенной формуле Коши $P(\Pi) \approx 4I_x(\Pi)I_y(\Pi)/I_0(\Pi)$ для балок с прямоугольными сечениями Π (см. [1] и [2]).

Определим обобщенный функционал Сен-Венана

$$P(\Omega) = 2\int_\Omega u(x)\,dx \in (0, \infty],$$

где Ω — n-мерная область и $u = u(x)$ — обобщенное решение краевой задачи

$$\Delta u = -2, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

В [3] нами доказано, что неравенство $P(\Omega) \leqslant I_0(\Omega)$ справедливо и для произвольных областей на плоскости. Кроме того, это неравенство было обобщено в [3] на случай многомерных областей в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Если $P(\Omega)$ — обобщенный функционал Сен-Венана для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то имеет место следующее изопериметрическое неравенство*

$$P(\Omega) \leqslant \frac{4}{n^2} I_0(\Omega) := \frac{4}{n^2} \int_\Omega |x|^2 \, dx.$$

Для случая $P(\Omega) < \infty$ равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда Ω — шар с центром в начале координат $(0, 0, \ldots, 0)$.

Второе изопериметрическое неравенство Е. Николаи является простым следствием первого в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим и равенства $I_x(\Omega) + I_y(\Omega) = I_0(\Omega)$. Нашей целью является распространение основного результата Е. Николаи, т. е. первого неравенства, на случай многомерных областей. Заметим, что для функционала Коши $4I_x(\Omega)I_y(\Omega)/I_0(\Omega)$ существует множество n-мерных аналогов. Приводимое ниже обобщение основано на следующем наблюдении: первое неравенство Е. Николаи может быть записано в виде

$$P(\Omega) \leqslant 4 \left[\frac{1}{I_x(\Omega)} + \frac{1}{I_y(\Omega)} \right]^{-1},$$

т. е. функционал Коши с точностью до постоянного множителя может быть истолкован как гармоническое среднее моментов инерции $I_x(\Omega)$ и $I_y(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть $P(\Omega)$ — обобщенный функционал Сен-Венана для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если величины $I_k(\Omega)$ являются инерциальными моментами, определенными формулами*

$$I_k(\Omega) = \int_\Omega x_k^2 \, dx \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то справедливо следующее изопериметрическое неравенство

$$P(\Omega) \leqslant 4\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{I_k(\Omega)}\right)\right]^{-1}.$$

Для случая $P(\Omega) < \infty$ *равенство в этом неравенстве будет иметь место тогда и только тогда, когда* Ω *является эллипсоидом с центром в начале координат* $(0, 0, \dots, 0)$.

Теорема 1 является следствием теоремы 2 в силу хорошо известного неравенства для гармонических и арифметических средних.

Естественным является вопрос о существовании нижних оценок для $P(\Omega)$ через гармоническую среднюю инерциальных моментов. А именно, рассмотрим следующий вопрос: найти постоянную $c > 0$, зависящую разве лишь от размерности n и такую, что неравенство

$$P(\Omega) \geqslant c\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{I_k(\Omega)}\right)\right]^{-1}$$

имеет место для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, или хотя бы для некоторого семейства областей.

Мы доказываем, что это неравенство с некоторой положительной постоянной имеет место в семействе выпуклых областей, но ответ на поставленный вопрос будет отрицательным в общем случае. Случай $n = 1$ является тривиальным и не рассматривается в следующей теореме. Отметим лишь, что в этом случае $\Omega = (a, b)$ и $P = 4I = (b-a)^3/3$, где I — момент инерции интервала относительно его центра.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ *— произвольная выпуклая область с центром масс в начале координат* $x = 0$.

Тогда

$$P(\Omega) \geqslant \frac{4}{n^{n+2}} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{I_k(\Omega)} \right) \right]^{-1}.$$

Для любой размерности $n \geqslant 2$ существует последовательность n-мерных областей Ω_j с центрами масс в начале координат $x = 0$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty} I_1(\Omega_j) = \lim_{j\to\infty} I_2(\Omega_j) = \ldots = \lim_{j\to\infty} I_n(\Omega_j) = \lim_{j\to\infty} Vol\,(\Omega_j) = \infty,$$

но величины $P(\Omega_j)$ равномерно ограничены, а именно,

$$P(\Omega_j) \leqslant 1 \quad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00381).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. *Кручение упругих тел.* – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.

2. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3–12.

3. Авхадиев Ф. Г. *Новые изопериметрические неравенства для моментов областей и жесткости кручения* // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 7. – С. 3–11.